

פיזיקה 1 מכניתה

פרק 7 - קוואורדינטות פולריות -

תוכן העניינים

1.....	1. הרצאות ותרגילים
(ללא ספר)	2. --- נושא ישן
(ללא ספר)	3. -- נושא ישן 2
(ללא ספר)	4. תרגילים מסכמים

הרצאות ותרגילים

רקע

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

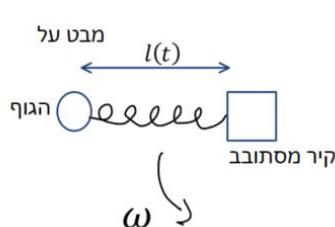
$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}\end{aligned}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}$$

שאלות



(1) **מזה קשרה עם קפץ לקיר מסתובב גוף נקודתי מחובר ע"י קפץ לקיר שמסתובב ב מהירות זוויתית קבועה ω במשור האופקי. אורך הקפץ משתנה בזמן ונתון לפיה :** $l(t) = l_0 + A \sin(\Omega t)$ כאשר A, Ω, l_0 הם קבועים חיוביים ומתקיים $A < l_0$.

א. מהי תאוצה הגוף בקוואורדינטות פולריות?

ב. נתנו A, Ω, l_0 ידועים, מהו התנאי על $l(t)$ כך שבנקודות זמן

מסויימות כיון התאוצה יהיה רק בכיוון $\hat{\theta}$?

ג. מהי התשובה המספרית לסעיף ב' אם $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $A = 0.2 \text{m}$, $\Omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$?

(2) דני מסתובב במעגלים

דני בן השלוש מתחילה לrhoץ במעגלים ממונחה.

דני מתרחק מהנקודה בה התחיל לrhoץ לפי: $A t^2 = r$ והוא מסתובב במהירות

$$\text{זוויתית הולכת וגדלה: } B t = \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}, B = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}. \quad A = 0.4167 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

א. מצא את המהירות של דני כתלות בזמן בקוואורדינטות פולריות.

ב. מצא את התאוצה של דני כתלות בזמן בקוואורדינטות פולריות.

ג. כאשר דני מגיע לתאוצה השווה ל- g הוא מקבל סחרחות ונופל (על הטוסיק כמובן), מתי ייפול דני?

(3) כוח מסתורי בциינור

ציינור מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω סביב מרכזו.

צדור קטן בעל מסה m נמצא ב- $t=0$ במרכז הצינור.

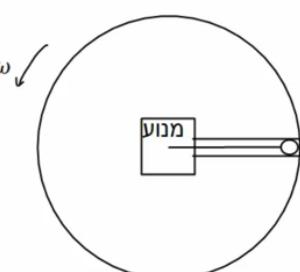
לצדור מהירות הIGINITALIAI v_0 בכיוון הרדייאלי.

כוח מסתורי F (לא בהכרח קבוע) פועל על הצדור

ושומר על מהירות הצדור ביחס לצינור להיות קבועה
ושווה ל- v_0 . בין הצינור לצדור אין חיכוך.

א. מה מיקום הצדור כתלות בזמן?

ב. מהו הכוח F כתלות בזמן הפעול על הצדור?

**(4) מנוע מושך הצדור בתוך דיסקה מסתובבת**

דיסקה ברדיוס R מונחת על שולחן ומקובעת במרכזו

אך מסתובבת סביב מרכזה במהירות זוויתית קבועה ω .

בתוך הדיסקה ישנה תעלה, הצדור בעל מסה m מונח

בקצתה של התעלה ויכול לזרז רק בתוך התעלה.

במרכז הדיסקה נמצא מנוע המחבר בחוטו לצדור.

המנוע מושך את הצדור למרכז הדיסקה כך שתאותצת
הצדור ביחס לדיסקה היא a_0 .

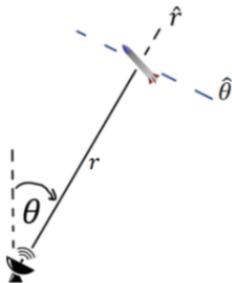
א. מצא את מיקום המסה כתלות בזמן ביחס לדיסקה וביחס למעבה, בקוואורדינטות פולריות.

ב. מה הכוח שפעיל המנוע על הצדור כתלות בזמן?

ג. מה הכוח שפעילים הקירות על הצדור?

5) מכ"ם מזזהה טיל

מכ"ם מזזהה טיל הנמצא מעט מעל האטמוספירה עם מנוע קבוע.
הבעיה דו מימדית.



נתון כי: $r = 70\text{km}$, $\theta = 30^\circ$, $\dot{r} = 1100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $\dot{\theta} = 1.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

הוכיח עם האוויר זנich בגובה רב והתאוצה היחידה היא תאוצה הכביד השווה ל- $\frac{9.6}{\text{sec}^2} \text{m}$ (התאוצה קטנה מעט בגל המרחק ממרכז כדור הארץ).

- מהו גודלה של מהירות הטיל?
- מצאו את הערך של \ddot{r} ושל $\ddot{\theta}$.

6) כדור חופשי בתוך צינור מסתובב

צינור מסתובב ב מהירות זוויתית קבועה ω סביב מרכזו.

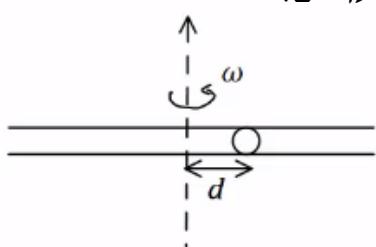
כדור קטן בעל מסה m נמצא בתוך הצינור.

ב- $t = 0$ הכדור נמצא במנוחה ביחס לצינור ובמרחק d ממרכז הצינור.
בין הצינור לכדור אין חיכוך.

- רשום את הכוחות הפועלים על הכדור בצירים פולריים.
- רשום את משוואת התנועה בכיוון הרדייאלי.

ג. בדוק כי הפתרון: $r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ מתאים

למשוואת שמ冤ת ומצא את הקבועים A , B .
ד. מהו הכוח הנורמלי הפועל מהצינור על כדור?

**7) משוואות לתנועת חלקיק**

תנועה חלקיק מתוארת ע"י המשוואות: $\dot{\theta} = \omega = \text{const}$ ו- $r = A \cdot t^\alpha$
כאשר α , A קבועים.

א. הבינו את r כתלות ב- θ .

ב. שרטטו את התנועה עבור: $\alpha = 0$, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$.

ג. הניחו כי הגוף מתחילה מהראשית וכי: $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $A = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $\alpha = 1$

כמה סיבובים יעבור הגוף עד שהרדיויס יהיה 30_m ?

8) חללית במסלול ספריאלי

חללית 1 נעה במסלול ספריאלי (בדו מימד) כך ש- $\dot{r} = A t^\alpha$, כאשר A ו- α הם קבועים חיוביים נתוניים.

$$\text{נתון גם כי: } \ddot{r} = A\alpha^2 t^{\alpha-2} - AC^2 t^\alpha e^{2Ct} (\alpha-1).$$

החללית נעה נגד כיוון השעון ו- C הוא גם קבוע חיובי נתון.
בזמן $t=0$ החללית חוצה את ציר ה- x השלילי.
א. מצאו את מיקום החללית בקוודינטות קרטזיות.

ב. חללית 2 נעה על מסלול ספריאלי כך ש- $\dot{r}_2 = \frac{1}{2} r_1(t)$ ובאותה זווית
כמו חללית 1.

- מצאו את המיקום, מהירות והतאוצה של חללית 1 ביחס לחללית 2.
ג. תארו באופן מילולי את תנועתה של חلالית 1 ביחס לחללית 2 אם $\alpha = 2$.

9) עכביש הולך על דיסקה מסתובבת

עכביש נמצא במרכזה של דיסקה המסתובבת במהירות זוויתית $0.2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

העכביש מתחילה לנוע במהירות קבועה ובקו ישר ביחס לדיסקה עד לקצת הדיסקה ברדיוס $2m$. הזמן שלוקח לעכביש להגיע לנקודה הוא 4 שניות.

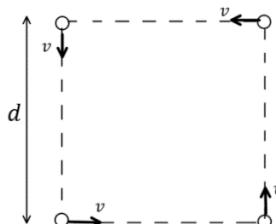
- א. מצאו את וקטורי מהירותו ותאוצתו של העכביש (ביחס למעבده).
ב. הסבירו מדוע יש לעכביש תאוצה אם הוא הולך במהירות קבועה ביחס לקרוסלה.
ג. הסבירו באופן אינטuitיבי את כל אחד מהרכיבים של תאוצת העכביש.

10) מהירות מינימלית ללוין

לוין שעובר בסמוך לפני כדה"א מרגיש תאוצה $\ddot{r} = -g$ (בהזנחה התנודות האווירה).
מצאו מה צריכה להיות המהירות המינימלית של הלוין כך שלא יתנגש לפני כדה"א
וישלים סיבוב.

11) משחק טופסת*

ארבעה ילדים משחקים טופסת, הם מתחילהים לרוץ מאربע פינות של ריבוע בגודל $d \times d$. כל ילד רץ ב מהירות קבועה v לעבר הילד שמשמאלו (הכוון הוא תמיד לכיוון הילד שמשמאלו).

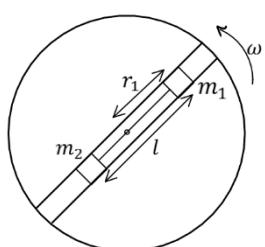


- תאר את תנועת הילדים וקבע היקן ייפגשו.
- עבור כמה זמן ייפגשו?
- כמה סיבובים עשה כל ילד עד למחצית הזמן שפגשו?
- מצא את וקטור המיקום של הילד המתחליל ברבע הראשו כפונקציה של הזמן בקוואורדייניות קרטזיות.

رمזים: מהי הסימטריה בעיה? איזה צורה יוצרים הילדים בכל רגע? רשום את המהירות של כל ילד בקוואורדייניות פולריות.

12) שתי מסות מחוברות בחוט בתוך דסקה מסתובבת*

על דסקה המסתובבת ב מהירות קבועה ω ישנה מסילה העוברת דרך מרכזו הדסקה. במסילה ישנן שתי מסות m_1 , m_2 המוחוברות בחוט באורך l . המערכת מונחת על שולחן אופקי (ז"א כיון כוח הכבידת לתוכה הדף).



- מצא את היחס בין המסות על מנת שרדיויס כל מסה יישאר קבוע במהלך התנועה.
- נסמן את הזמן שבו חוטים את החוט $t=0$.
- רשום משוואת דיפרנציאלית שפתרונה ייתן את $r_1(t)$.
- פתרור את המשוואת ומצא את $r_1(t)$.
- הנח כי r_1 הוא מיקום המסה ברגע השחרור.

13) רוכב אופנוו*

רוכב אופנוו מתחילה את תנועתו ממנוחה. מרחקו מנקודת ההתחלת משתנה לפי $r = Ct$, כאשר C קבוע. בנוסף הרוכב מסתובב ב מהירות קבועה ω . מצא את המרחק המקסימלי אליו הגיע הרוכב אם נתנו מקדם החיכוך הסטטי μ_s .

14) סטודנט ומרצה על גלגל ענק*

סטודנט נmrץ פוגש מרצה בעת ביקורו בפארק שעשויים.

סטודנט נחוש בדעתו להראות שהוא יודע מכניקה וMSCNCA את המרצה לטפס למרכז גלגל ענק. הסטודנט עולה על الكرון של הגלגל. הגלגל מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω עם כיוון השעון ורדיווט R. כשהסטודנט מגיע לשיא הגובה המרצה זורק כרית מהירות התחלתית v_0 ובזווית α ביחס לאופק.

בזמן מסוים לאחר זריקת הכרית הסטודנט קופץ מהקרון כך שמהירותו היא מהירות המשיקת של הקרון ביחס למרצה. הסיכוי היחיד של הסטודנט לא להיפגע בעת הפגיעה בקרקע הוא אך ורק אם ינחת על הכרית.

הנח שתנועת הכרית היא כתנועת אבן.

לפני הזינוק של הסטודנט:

- רשמו את וקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות קרטזיות ביחס למרצה.
- רשמו את וקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות פולריות ביחס למרצה.
- רשמו את וקטור המיקום של הסטודנט בקואורדינטות קרטזיות ביחס למרצה.
- רשמו את וקטור המיקום של הסטודנט בקואורדינטות פולריות ביחס למרצה.
- רשמו את וקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות קרטזיות ביחס לסטודנט.
- מה צריכה להיות גודלה של המהירות ההתחלתית v_0 והזווית α כדי שהכרית תעבור ליד הסטודנט לאחר זמן t_0 .

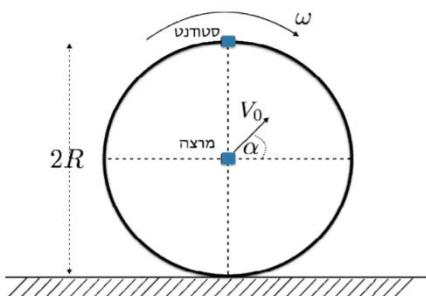
סטודנט מחליט קופז כהכרית עוברת לידו (אסור לו לתפוס אותה כשהיא לידו).

ז. הכרית יכולה לעبور ליד הסטודנט כשהיא לפני שיא הגובה, בשיא הגובה או אחריו. באיזה משלוחת המקטים על הסטודנט קופז על מנת לחסוך את הוצאות החיבור של האבולנס? (نمוקו את תשובתכם).

- על פי הסעיף בהינתן שהסטודנט והכרית בקרקע באותו הזמן. מה הוא הקשר בין וקטורי המהירות של הסטודנט והכרית בעת הקפיצה כך שהסטודנט לא יפגע?
- חשבו את הגובה בו תתרחש הקפיצה.

בטאו את הגובה הניל'י בעורק הבועה בלבד

(t_0) הוא לא קבוע בעיה עבר שאלת זו.



15) קروسלה**

חיפושית נעה על קروسלה המסתובבת במהירות זוויתית קבועה ω_0 .

רדיוס הקروسלה R. החיפושית נעה מקצת הקروسלה למרכזה ב מהירות קבועה v_0 ביחס לקרוסלה.

א. מצא את מיקום החיפושית בקורדיינטות קרטזיות ובקורדיינטות פולריות ביחס לצופים הבאים:

- i. צופה A - הנמצא על הקروسלה בנקודת ההתחלה של החיפושית.
- ii. צופה B - הנמצא על הקروسלה במרכזה.
- iii. צופה C - הנמצא במרכז הקروسלה אך אינו מסתובב אליה.
- iv. צופה D - הנמצא בקצת הקروسלה ואינו מסתובב עם הקروسלה.

ב. מצא את המהירות והתאוצה ביחס לאותם צופים.

תשובות סופיות

$$\vec{a} = -\left(\left(\Omega^2 + \omega^2\right)A \sin \Omega t + \omega^2 l_0\right)\hat{r} + \left(2\Omega A \cos \Omega t\right)\hat{\theta} . \text{ נ } \quad (1)$$

$$\theta < l_0 \leq 2m . \text{ ג} \quad \theta < l_0 \leq \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\omega^2} \cdot A . \text{ ב}$$

$$\vec{a} = \left(2A - B^2 A t^4\right)\hat{r} + \left(5ABt^2\right)\hat{\theta} . \text{ ב} \quad \vec{r} = 2At\hat{r} + At^2 \cdot B t \hat{\theta} . \text{ א} \quad (2)$$

$$t = 2 \text{ sec} . \text{ ג}$$

$$F_r = m\left(0 - \omega^2 v_0 t\right) . \text{ ב} \quad r = v_0 \cdot t , \theta(t) = \omega \cdot t . \text{ נ} \quad (3)$$

$$, r'(t) = R - \frac{1}{2}a_0 t^2 , \theta'(t) = 0 . \text{ א. ביחס לדיסקה :} \quad (4)$$

$$T = m \left(a_0 + \omega^2 \left(R - \frac{1}{2}a_0 t^2 \right) \right) . \text{ ב} \quad r(t) = R - \frac{1}{2}a_0 t^2 , \theta(t) = \omega t . \text{ ביחס למכביה :}$$

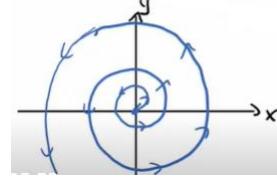
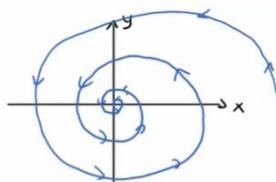
$$N_z = mg . \text{ ג}$$

$$\ddot{r} = 7.44 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} , \ddot{\theta} \approx -4.03 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} . \text{ ב} \quad |\vec{v}| \approx 1521 \frac{\text{m}}{\text{sec}} . \text{ נ} \quad (5)$$

$$\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = 0 . \text{ ב} \quad \sum F_r = 0 , \sum F_\theta = N_\theta , \sum F_z = N_z - mg . \text{ נ} \quad (6)$$

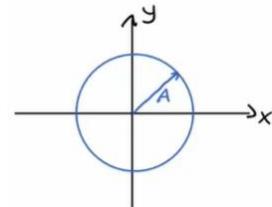
$$N_\theta = m\omega^2 d \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t} \right) , N_z = mg . \text{ ג} \quad \dot{r} = \omega A e^{\omega t} - \omega B e^{-\omega t} , A = B = \frac{d}{2} . \text{ ג}$$

$$: \alpha < 0 \quad : \alpha > 0 . \text{ ב} \quad r = A \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^\alpha . \text{ נ} \quad (7)$$



$$N \approx 2.39 . \text{ ג}$$

$$: \alpha = 0$$



$$\vec{r}(t) = At^\alpha \left(-\cos(e^{ct} - 1)\hat{x} - \sin(e^{ct} - 1)\hat{y} \right) . \text{ נ} \quad (8)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}At^\alpha , y(t) = 0 . \text{ ב}$$

$$v_x(t) = -\frac{1}{2}A\alpha t^{\alpha-1} , a_x(t) = -\frac{1}{2}A\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

ג. תנועה בתאוצה קבועה בקו ישר.

$$\vec{v} = 0.5\hat{r} + 0.1t\hat{\theta}, \vec{a} = -0.02 \cdot t\hat{r} + 0.2\hat{\theta} \quad \text{א. (9)}$$

ב. כי הוא לא זו ב מהירות קבועה ביחס למעבده.

ג. רכיב רציאלי: תאוצה רציאלית מהתנוועה.

רכיב θ : $v_\theta = \omega r$ בגלל ש- r משתנה צריך תאוצה בכיוון θ שתגדיל את

המהירות בכיוון θ אפילו ש- ω קבוע.

$$\sqrt{gR_E} \quad \text{ב. (10)}$$

א. התנוועה היא של הפינות של ריבוע הקטן ומסתווב. המפגש יהיה במרכזו.

$$\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot g. \quad \frac{d}{v} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{vt}{\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}} \right) \left[\cos \left(\ln \left(\frac{d}{d-vt} \right) + \frac{\pi}{4} \right) \hat{x} + \sin \left(\ln \left(\frac{d}{d-vt} \right) + \frac{\pi}{4} \right) \hat{y} \right]. \quad \text{כ.}$$

$$r_1(t) = \frac{r_1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}). \quad \ddot{r}_1 = \omega^2 r_1. \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad \text{א. (12)}$$

$$r_{\max} = \sqrt{(\mu_s g)^2 - (2C\omega_0)^2} \left(\frac{1}{\omega_0} \right) \quad \text{ב. (13)}$$

$$x_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t, y_1 = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2. \quad \text{א. (14)}$$

$$r = \sqrt{(v_0 \cos \alpha \cdot t)^2 + \left(v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \right)^2}, \tan \theta = \frac{v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2}{v_0 \cos \alpha \cdot t}. \quad \text{ב.}$$

$$r = R, \theta = \frac{\pi}{2} - |\omega| \cdot t. \quad x_2 = R \cos \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t \right), y_2 = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t \right). \quad \text{ג.}$$

$$x_{1,2} = v_0 \cos \alpha t - R \cos \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t \right), y_{1,2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} gt - R \sin \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t \right). \quad \text{ה.}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} g t_0^2 + R \sin \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t_0 \right)}{R \cos \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t_0 \right)}. \quad \text{ו.}$$

$$v_0^2 t_0^2 = \left(\frac{1}{2} g t_0^2 + R \sin \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t_0 \right) \right)^2 + R^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - |\omega| t \right)$$

ח. וקטורי המהירות חייבים להיות שוים בגודל ובכיוון.

$$y = \frac{v_0 \cos \alpha}{|\omega|} t. \quad \text{ט.}$$

ב. ראו סרטון. א. ראו סרטון.